Respuestas Segundo Parcial MA-1111 (3:30 pm).

1. (a) (3 puntos)

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x^2+3x-60}{4x^2-4x-48} = \lim_{x\to 4} \frac{3(x-4)(x+5)}{4(x-4)(x+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{3(x+5)}{4(x+3)} = \frac{27}{28}$$

(b) (5 puntos)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y(y+4)}{\operatorname{sen}(\pi(y+2))} = \lim_{y\to 0} \frac{y(y+4)}{\operatorname{sen}(\pi y+2\pi)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y(y+4)}{\operatorname{sen}(\pi y)} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\pi y}{\operatorname{sen}(\pi y)}\right)\left(\frac{y+4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$$

2. (a) (2 puntos) graphicx [width=70mm, height=70mm, angle=30]34.jpg

Dominio$(f) = (-\infty, 2]$, Rango$(f) = [3, \infty)$

(b) (2 puntos)

Si $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ (x_1-2)^2+3 &= (x_2-2)^2+3 \\ (x_1-2)^2 &= (x_2-2)^2 \\ \sqrt{(x_1-2)^2} &= \sqrt{(x_2-2)^2} \\ |x_1-2| &= |x_2-2| \\ -(x_1-2) &= -(x_2-2) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

O explicar que cualquier recta horizontal que corta a $y = f(x)$ lo hace en un único punto.

(c) (3 puntos)

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2+3 \\ y-3 &= (x-2)^2 \\ -\sqrt{y-3} &= x-2 \\ 2-\sqrt{y-3} &= x \end{aligned}$$

Entonces $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{x-3}$ y Dominio(f^{-1}) = Rango$(f) = [3, \infty)$

3. (8 puntos)

$f(2) = 0$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)^2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)^2}{-(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} -(x-2) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1-\cos(2\mathrm{x}-4)}{(2x-4)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1-\cos(\mathrm{y})}{y} = 0$$

Como

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$f(x)$ es continua en $x = 2$.

4. (7 puntos)

Asíntotas Verticales:

$x = 2$ es una asíntota vertical pues:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} = -\infty.$$

$x = -2$ es una asíntota vertical pues:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} = -\infty.$$

Asíntotas Oblicuas:

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$$

Entonces $y = x$ es asíntota oblicua a derecha y a izquierda.

Otra forma:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^3}{x^2-4} - x) \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x-\frac{4}{x}} = 0 = b$$

Entonces $y = x$ es asíntota oblicua a derecha.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{x^2}} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x\right) \lim_{x\to -\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4}{x - \frac{4}{x}} = 0 = b$$

Entonces $y = x$ es asíntota oblicua a izquierda.

Asíntotas Horizontales: No tiene.

5. (5 puntos)

Dado $\epsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(x^2 + 2x + 2) - 10| < \epsilon$

Veamos:

$|(x^2 + 2x + 2) - 10| = |x^2 + 2x - 8| = |(x + 4)(x - 2)| = |x + 4|\,|x - 2|$

Si $|x - 2| < 1$ entonces $|x + 4| = |(x - 2) + 6| \leq |x - 2| + 6 < 7$.

Por lo tanto, si $\delta \leq \min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$ y $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene que:

$$|(x^2 + 3x + 1) - 11| = |x + 5|\,|x - 2| < 7\,\delta \leq 7\,\frac{\epsilon}{7} = \epsilon$$